Durée : 4 heures

Dans cet énoncé, on utilise les notations suivantes :

E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension n. Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est noté $< x, y >$ et la norme de x est notée $\| x \|$.

$M_{p,q}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices A à p lignes et q colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$. L'élément situé à la ligne i et à la colonne j est noté a_{ij}. Le déterminant est noté dét A.

Si $X = (x_1, x_2, \ldots, x_q)$ est un système de q vecteurs de E, on note $\mathcal{V}(X)$ l'espace vectoriel engendré par $x_1, x_2, \ldots, x_q$ dans E. Si $B = (b_1, b_2, \ldots, b_p)$ est une base de $\mathcal{V}(X)$ et si

$$x_j = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{ij} b_i, \quad 1 \leqslant j \leqslant q,$$

on note $P_B(X)$ la matrice de $M_{p,q}(\mathbb{R})$ d'élément générique α_{ij}. $G(X)$ est l'élément de $M_{q,q}(\mathbb{R})$ d'élément générique : $a_{ij} = < x_i, x_j >$.

PREMIÈRE PARTIE

I

Soit $X = (x_1, x_2, \ldots, x_q)$ un système de vecteurs de E.

1° Montrer que, si le système X est lié, le déterminant de G (X) est nul.

2° Montrer que le rang de G (X) est inférieur ou égal à la dimension de $\mathcal{V}(X)$ notée dim $\mathcal{V}(X)$.

3° *a.* Démontrer que $G(X) = {}^t(P_B(X))\, P_B(X)$ où B est une base orthonormée quelconque de $\mathcal{V}(X)$.

b. Montrer que le déterminant de G (X) est indépendant de l'ordre des vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_q$.

c. Si X est un système libre, montrer que le déterminant de G (X) est strictement positif.

4° Montrer que le rang de G (X) est égal à dim $\mathcal{V}(X)$.

II

Si $X = (x_1, x_2, \ldots, x_q)$ est un système libre, $q \geqslant 1$; soit $\mathcal{V}_i(X)$ l'espace vectoriel engendré par $(x_1, x_2, \ldots, x_i)$, $i \leqslant q$. On désigne par P_i la projection orthogonale de $\mathcal{V}(X)$ sur $\mathcal{V}_i(X)$.

On pose :

(1) $$\omega_1 = x_1$$

(2) $$\omega_{i+1} = x_{i+1} - P_i(x_{i+1}) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant q-1$$

1° Montrer qu'il existe des réels θ_i, $1 \leqslant i \leqslant q-1$, uniques, qui vérifient :

(3) $$\theta_i \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$$

(4) $$\cos\theta_i = < x_{i+1}, \omega_{i+1} > \; < x_{i+1}, x_{i+1} >^{-\frac{1}{2}} < \omega_{i+1}, \omega_{i+1} >^{-\frac{1}{2}}.$$

2° Établir la relation (pour $q \geqslant 2$) :

(5) $$\det G(X) = \prod_{i=1}^{q} < x_i, x_i > \prod_{j=1}^{q-1} (\cos\theta_j)^2$$

$\left(\text{On utilisera I. 3° dans la base orthonormée } b_i = \dfrac{\omega_i}{< \omega_i, \omega_i >^{\frac{1}{2}}}\right)$.

3° En déduire que :

(6) $$\det G(X) \leqslant < x_1, x_1 > < x_2, x_2 > \ldots < x_q, x_q >$$

et discuter le cas d'égalité dans la relation précédente.

DEUXIÈME PARTIE

I

Soient $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ et $Y = (y_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ deux systèmes libres ou liés de vecteurs de E. On note G (X, Y) la matrice de $M_{q,p}(\mathbb{R})$ d'élément générique $a_{ij} = < x_i, y_j >$.

Soient B une base de $\mathcal{V}(X)$ et C une base de $\mathcal{V}(Y)$.

Établir que :

(7) 1° $G(X, Y) = {}^t(P_B(X))\, G(B, C)\, P_C(Y)$

2° Si $q = p$, et, si X ou Y est un système lié, $\det G(X, Y) = 0$.

E.N.S. FONTENAY ET ST-CLOUD 1980 (page 20)

II

Soient X et Y deux systèmes libres de q vecteurs, $q \geqslant 1$.

On pose $L_0 = \mathcal{V}(X)$ et $M_0 = \mathcal{V}(Y)$.

1° Montrer, par récurrence, qu'il existe une base orthonormée $B = (b_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ de L_0 et une base orthonormée $C = (c_j)_{1 \leqslant j \leqslant q}$ de M_0 ainsi que des sous-espaces vectoriels $(L_i)_{1 \leqslant i \leqslant q-1}$ de L_0 et $(M_j)_{1 \leqslant j \leqslant q-1}$ de M_0 tels que :

a. $b_1 \in L_0$, $c_1 \in M_0$ et

$$< b_1, c_1 > = \max \{ < b, c > ; b \in L_0, c \in M_0, \|b\| = 1, \|c\| = 1 \}$$

b. Si $(b_i)^\perp$ est l'orthogonal de b_i dans E et $(c_i)^\perp$ celui de c_i dans E, on a pour $1 \leqslant i \leqslant q-1$:

$$L_i = L_{i-1} \cap (b_i)^\perp , \quad M_i = M_{i-1} \cap (c_i)^\perp .$$

c. Pour $1 \leqslant i \leqslant q-2$, on a :

$$b_{i+1} \in L_i , \quad c_{i+1} \in M_i \quad \text{et}$$

$$< b_{i+1}, c_{i+1} > = \max \{ < b, c > ; \ b \in L_i, c \in M_i, \|b\| = 1, \|c\| = 1 \}.$$

2° Montrer que dans la construction précédente on peut choisir b_q et c_q de telle sorte que :

$$\det P_B(X) > 0 \quad \text{et} \quad \det P_C(Y) > 0.$$

Dans la suite, on utilisera des couples de bases construites par ce procédé (1° et 2°).

3° Montrer que $< b_i, c_j > = 0$ pour $i \neq j$.

$$\left(\text{On pourra considérer la fonction } \varphi : t \longmapsto \varphi(t) = < b_i, \frac{c_i + t c_j}{\|c_i + t c_j\|} > \right).$$

4° Soient θ_i (resp μ_i) les réels associés à X (resp Y) introduits dans la 1re partie question II. 1°. On pose : $\cos \varphi_j = < b_j, c_j >$.

Montrer que :

$$\text{(8)} \qquad \det G(X, Y) = (\det G(X))^{\frac{1}{2}} (\det G(Y))^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^{q} \cos \varphi_i$$

$$\text{(9)} \qquad \det G(X, Y) = \prod_{i=1}^{q-1} \cos \theta_i \cos \mu_i \prod_{j=1}^{q} \cos \varphi_j \, \|x_j\| \, \|y_j\|$$

Tournez la page S. V. P.

5° *a.* Montrer que :

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} \cos \varphi_1 \geqslant \cos \varphi_2 \geqslant \ldots \geqslant \cos \varphi_{q-1} \geqslant 0 \\ \cos \varphi_{q-1} \geqslant \cos \varphi_q \end{cases}$$

b. Soient (B, C) et (D, F) deux couples de bases construites par le procédé ci-dessus.

α. Montrer que si $D = (d_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ et $F = (f_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ et si la condition (H) suivante est vérifiée :

(H) $\forall (i, j), 1 \leqslant i < j \leqslant q \Rightarrow \cos \varphi_i > \cos \varphi_j$,

alors on a pour tout i :

$$d_i = \varepsilon_i b_i , \ f_i = \varepsilon_i c_i \quad \text{avec} \quad |\varepsilon_i| = 1 \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{q} \varepsilon_i = 1.$$

β. Que peut-on dire si (H) n'est pas vérifiée?

γ. En déduire que les nombres $\cos \varphi_1, \cos \varphi_2, \ldots, \cos \varphi_q$, sont les mêmes pour (B, C) et (D, F).

III

Soient X et Y deux systèmes libres de q vecteurs. On désigne par $F^\perp$ l'orthogonal dans E du sous-espace vectoriel F.

1° Démontrer que $\det G(X, Y) = 0$ si et seulement si

$$\mathcal{V}(X) \cap (\mathcal{V}(Y))^\perp \neq \{\vec{0}\}$$

2° Établir que le rang r de G (X, Y) vaut :

$$r = \dim [\mathcal{V}(X)] - \dim [\mathcal{V}(X) \cap (\mathcal{V}(Y))^\perp]$$

$$\text{et } r = \dim [\mathcal{V}(Y)] - \dim [\mathcal{V}(Y) \cap (\mathcal{V}(X))^\perp].$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail